数理解析研究所講究録
680巻 1989年 1-8

凸関数の一般化について

京都大学 工学部　　田中 嘉浩 (Yoshihiro Tanaka)

1．はじめに

Mangasarian [10] が準凸，擬凸関数を提案して以来，凸関数の一般化についての多くの研究がなされてきた [1]．それらは双対性の理論 [4] や最適性の条件に関するものが中心であるが，分数計画や経済理論との関連においても研究されてきている．ところで，最近 Hanson [6]は，Kuhn-Tucker条件の十分性を示すために，invex 関数を提案した．本稿ではある種の微分不可能な関数の枠組の下で invex 関数の性質を明らかにし，他の諸関数との関係を示す．

2．一般擬凸関数

任意の点の近傍で上に有界な凸関数は局所リプシッツ連続かつ正則 [3] である．今 $f: R^n \to R$ を局所リプシッツ連続かつ正則とすると，

$$f'(x;d) = \max\{\xi^T d \mid \xi \in \partial f(x)\} \quad \text{for any } x \text{ and } d, \tag{2.1}$$

が成立する．次の一般化を考える．

<u>定義 2.1.</u>　f が局所リプシッツ連続かつ正則であり，各 $x,\ u \in R^n$ に対し，$\eta(x,u) \in R^n$ が存在して，

$$f(x) - f(u) \geqq f'(u;\eta(x,u)), \tag{2.2}$$

を満たす時，関数 f を <u>invex</u> という．

fが微分可能ならば，(2.2)は [6] の定義に一致する．fのレベル集合 $L_f(\alpha)$を，$L_f(\alpha) := \{x \mid f(x) \leqq \alpha\}$ で定義する．

<u>定義 2.2</u>[14].　点-集合写像 $A: R \to R^n$ に対し，α $(A(\alpha) \neq \phi)$ に於いて，$x \in A(\alpha)$, $\{\alpha^i\} \to \alpha$ ならば，ある自然数 K，点列 $\{x^i\}$，実数 $\beta(x) > 0$ が存在して，

$$x^i \in A(\alpha^i - \beta(x) \cdot \|x^i - x\|) \quad \text{for} \quad i \geqq K, \quad \{x^i\} \to x,$$

を満たす時，$A(\cdot)$ を狭義下半連続 (strictly lower semi-continuous) という．

次の定理が成立する．

定理 2.1. f を局所リプシッツ連続かつ正則とする．その時，f が invex である為の必要十分条件は次の各々が成立することである．
 (a) $0\in\partial f(u)$ なる u が f の大域最小点．
 (b) 点-集合写像 $L_f(\cdot)$ が狭義下半連続．

［証明］ (a) の必要性は，$0\in\partial f(u)$ ならば $f(x)-f(u)\geqq f'(u;\eta(x,u))\geqq 0^T\eta(x,u)=0$ より従う．十分性は，(a) が成立すれば (2.2) を満たす $\eta(x,u)$ が存在することを示せばよい．実際 $0\in\partial f(u)$ ならば $\eta(x,u)=0$ とすればよい． $0\notin\partial f(u)$ ならば，

$$\hat{\xi}^T\eta(x,u) = f(x) - f(u),$$

が成立する様に，

$$\eta(x,u) = (f(x) - f(u))\hat{\xi} \,/\, (\hat{\xi}^T\hat{\xi}),$$

但し，

$$\hat{\xi} = \begin{cases} \operatorname*{argmax}_{\xi\in\partial f(u)} \|\xi\|, & \text{if } f(x) - f(u) > 0, \\ \text{any nonzero vector}, & \text{if } f(x) - f(u) = 0, \\ -\operatorname*{argmin}_{\xi\in\partial f(u)} \|\xi\|, & \text{if } f(x) - f(u) < 0, \end{cases}$$

とする．この時 f の局所リプシッツ連続性により $\partial f(u)$ はコンパクト凸集合になる（[3] 参照）ので，関数 $\xi^T\eta(x,u)$ は $\xi\in\partial f(u)$ 上の最大値を点 $\hat{\xi}$ で達成する． よって (2.1) より $f'(u;\eta(x,u))=\hat{\xi}^T\eta(x,u)$ となるので，

$$f(x) - f(u) = f'(u;\eta(x,u)),$$

が成立し (2.2) が満足される．
 (b) の必要十分性を示すには，[14] で定義された y-方向微分

$$\delta(x,y) = \lim_{k\to\infty}\frac{f(x^k) - f(x)}{\|x^k - x\|}, \quad \left(y = \lim_{k\to\infty}\frac{x^k - x}{\|x^k - x\|} ;\ x^k\to x \right)$$

の存在を言えばよい．今 $x^k=x+\alpha^k y^k$ ($\alpha^k>0$, $\alpha^k\to 0$, $\|y^k\|=1$) とおくと，

$$y^k\to y \ \text{ as } \ k\to\infty, \tag{2.3}$$

となる．この時， f の正則性から $f'(x;y)$ が存在して，

$$\delta(x,y) - f'(x;y) = \lim_{k\to\infty}\frac{f(x^k) - f(x)}{\|x^k - x\|} - \lim_{\alpha^k\downarrow 0}\frac{f(x+\alpha^k y) - f(x)}{\alpha^k}$$

$$= \lim_{\alpha^k\downarrow 0}\frac{f(x+\alpha^k y^k) - f(x+\alpha^k y)}{\alpha^k} \tag{2.4}$$

f は局所リプシッツ連続であるから，

$$\frac{|f(x+\alpha^k y^k) - f(x+\alpha^k y)|}{\|\alpha^k y^k - \alpha^k y\|} \leqq M, \tag{2.5}$$

なる $M>0$ が存在する． (2.3), (2.5) から，

$$\frac{|f(x+\alpha^k y^k) - f(x+\alpha^k y)|}{\alpha^k} \leqq M\|y^k - y\| \to 0 \quad \text{as} \quad k\to\infty,$$

即ち， (2.4) より $\delta(x,y)=f'(x;y)$ となる．よって (a) と [14, 系 2.1] により結果が従う． □

上の証明から，停留点を持たない関数も invex であることが分かる．
次の定義をする．

<u>定義 2.3.</u> f が局所リプシッツ連続かつ正則であり， f に対して， $f=\psi\circ T$ なる関数 ψ: $R^n\to R$, 微分同相写像 T: $R^n\to R^n$ が存在して，任意の $x, \bar{x}\in R^n$ に対して，

$$\psi'(\bar{z};z-\bar{z}) \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(z) \geqq \psi(\bar{z}), \tag{2.6}$$

但し $z=T(x)$, $\bar{z}=T(\bar{x})$ なる関係を満たす時， f を<u>本質的に擬凸</u> (essentially pseudoconvex) という．特に T が恒等写像の時，即ち，$x_1, x_2\in R^n$ に対して，

$$f'(x_1;x_2-x_1) \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) \geqq f(x_1), \tag{2.7}$$

の時， f を<u>擬凸</u>という．

上の擬凸の定義は [10] の一般化になっており， [11] の semiconvex と同値である．

<u>補題 2.2</u>[3]. 定義 2.3 に於いて (f が正則なので) ψ も正則であり，

$$\partial f(x) = \partial\psi(z)\circ\nabla T(x) := \{\xi \mid \xi=\nabla T(x)^T\zeta,\ \zeta\in\partial\psi(z)\},$$

を満たす． □

もう一つのクラスを定義する．

<u>定義 2.4.</u> $u, x\in R^n$ に対し，連続写像 p_{ux}: $[0,1]\to R^n$ が，$p_{ux}(0)=u$, $p_{ux}(1)=x$, $\dot{p}_{ux}(t)$ が任意の $t\in(0,1)$ に対して連続であり， f の大域最小解以外の $p_{ux}(t)$ で， $\dot{p}_{ux}(t)\neq 0$ なる時，この写像を， u から x への<u>弧</u> (arc) という．

<u>定義 2.5.</u> f が局所リプシッツ連続かつ正則であり，任意の $u, x\in R^n$ に対し弧 $p_{ux}(\cdot)$ が存在して任意の $0\leqq\bar{t}\leqq t<1$ で，

$$f'(p_{ux}(\bar{t});\dot{p}_{ux}(\bar{t})) \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad f(p_{ux}(t)) \geqq f(p_{ux}(\bar{t})), \tag{2.8}$$

を満たす時， f を<u>弧状擬凸</u> (arcwise pseudoconvex) という．

<u>補題 2.3.</u> f が弧状擬凸ならば，任意の α に対して $L_f(\alpha)$ は連結である．
[証明] 自明． □

invex 関数は必ずしも弧状擬凸でない．

例 1. $f(x) = -x_2^2 + \exp x_1$.

仮定 (A). 任意の x_1，x_2 に対して，(2.7) を満たす弧 $p_{x_1 x_2}(\cdot)$ の少なくとも一つを線分 $\{\hat{r}(p_{x_1 x_2}(t)) \mid 0 \leqq t \leqq 1\} = \{(1-s)\hat{r}(x_1) + s\hat{r}(x_2) \mid 0 \leqq s \leqq 1\}$ に変換する微分同相写像 $\hat{r}$ が存在する．

補題 2.4. f が本質的に擬凸ならば弧状擬凸である．また，仮定 (A) の下で逆が成立する．

［証明］ 略． □

仮定 (A) なしには逆は必ずしも成立しない．

例 2. $f(x) = \max\{x_1^2(x_1^2 - 2) + x_2^2, 0\}$.

$L_f(\cdot)$ のコンパクト性と最小解集合の唯一性の関係を調べたい．

補題 2.5. f が invex，C^1 級，かつ $L_f(\alpha)$ が各 α に対してコンパクトならば $L_f(\alpha)$ は各 α に対して連結である．

［証明］ f の連続性から十分大きな α に対して $L_f(\alpha)$ は連結である．今，ある $\bar{\alpha}$ が存在して，$L_f(\bar{\alpha})$ が連結かつ任意の $\alpha < \bar{\alpha}$ に対して $L_f(\alpha)$ は連結でないとする．その時，定理 2.1(b) から，$L_f(\alpha)$ は $V_\alpha \cap W_\alpha \neq \phi$，$V = \lim_{\alpha \uparrow \bar{\alpha}} V_\alpha$，$W = \lim_{\alpha \uparrow \bar{\alpha}} W_\alpha$，但し $V \cup W \subset L_f(\alpha)$，$V \cap W \neq \phi$ を満たす少なくとも二つの要素 V_α と W_α からなる．さて $\bar{x}$ を $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ を満たす $V \cap W$ 内の点とする．その時，$\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ ならば $\{x \mid f(x) = \bar{\alpha}\}$ は n-1 次元の 可微分多様体となるので，$\bar{x}$ の十分な近傍 U に対して $L_f(\bar{\alpha}) \cap U$ は連結である． f はC^1 級なので $\bar{\alpha}$ に十分近い α に対して $L_f(\alpha) \cap U$ もまた連結になる．これは，$L_f(\alpha) \cap U$ が少なくとも二つの集合 $V_\alpha \cap U$ と $W_\alpha \cap U$ とからなることに矛盾する．よって，$\nabla f(\bar{x}) = 0$ でなければならないが，ある $\alpha < \bar{\alpha}$ に対して $L_f(\alpha) \neq \phi$ となるので $\bar{x}$ は f の局所最小解になりえず，定理 2.1(a) に矛盾する． □

自律系

$$\frac{dx}{d\tau} = -\nabla f(x), \quad x(0) = x_1 \tag{2.9}$$

の解曲線の性質は Lyapunov の方法 [8] で調べられるが，それを利用することにより次の補題を得る．

補題 2.6. f が弧状擬凸ならば invex である．また，f がC^1 級で，最小解をある唯一の点で達成し，各 α に対してコンパクトなレベル集合 $L_f(\alpha)$ を持てば逆が成立する．

［証明］ 略． □

以上の結果をまとめる．

定理 2.7. f を局所リプシッツ連続かつ正則とする．この時 f が本質的に擬凸ならば弧状擬凸であり， f が弧状擬凸ならば invex である．また補題 2.4，2.6 の条件の下でそれぞれ逆が成立する．□

3．制約付最適化

次の制約付問題を考える．

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f(x) \\ &\text{subject to} \quad g_i(x) \leqq 0, \quad i=1,\ldots,m, \end{aligned} \tag{3.1}$$

但し $f: R^n \to R$, $g_i: R^n \to R$, $i=1,\ldots,m$, は局所リプシッツ連続かつ正則とする．

(3.1) に対する Lagrangian を，

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \quad \text{for } \lambda \in R^m_+,$$

で定義する．(2.2) で定義された invex 関数の性質より，次の結果を得る．

定理 3.1. $L(\cdot,\lambda)$ が任意の $\lambda \geqq 0$ に対して invex とし，(3.1) は $\bar{x}$ で calm ([3]) と仮定する．この時， $\bar{x}$ が (3.1) の大域最適解になる為の必要十分条件は，

$$\begin{aligned} &0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}), \\ &\bar{\lambda}_i \geqq 0, \quad g_i(\bar{x}) \leqq 0, \quad \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i=1,\ldots,m. \end{aligned} \tag{3.2}$$

をみたす $\bar{\lambda} \geqq 0$ が存在することである．

[略証] 必要性は calmness の仮定の下では [3, 命題 6.4.4] より直ちに従う．十分性は，

$$\partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) = \partial (f + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i g_i)(\bar{x}),$$

に注意すると， (3.2) と定理 2.1(a) により，任意の許容解 x に対して，

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \\ &\leqq f(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i g_i(x) \\ &\leqq f(x), \end{aligned}$$

により示される． □

例えば $\nabla f(x)$, $\nabla g_i(x)$, $i=1,\ldots,m$, の非零のものが任意の x に対して非負一次独立ならば，$L(\cdot,\lambda)$ の invex 性は満足される．

$L(\cdot,\lambda)$ 自体には仮定を設けずに同様の結果を得たい．

仮定 (B). f, g_i, $i=1,\ldots,m$, が共通の写像 T に関して本質的に擬凸である．

仮定 (B) は $L(\cdot,\lambda)$ の本質的擬凸性は含んでいない．これは，f, g_i, $i=1,\ldots,m$, の invex 性 (共通の η に対する) が $L(\cdot,\lambda)$ の invex 性を含む事実と対照的である．[10] の結果を一般化すれば次の補題が得られる．

補題 3.2.　問題 (3.1) に於いて f, g_i, $i=1,\ldots,m$, が定義 2.3 の意味で擬凸とする．また (3.1) は $\bar{x}$ で calm と仮定する．この時 $\bar{x}$ が (3.1) の大域最適解である為の必要十分条件は，$\bar{x}$ に於いて一般化された Kuhn-Tucker 条件 (3.2) が成立することである．

［証明］　略．　□

以上の事等から次の結果を得る．

定理 3.3.　仮定 (B) が成立するとする．また (3.1) は $\bar{x}$ で calm と仮定する．この時 $\bar{x}$ が (3.1) の大域最適解である為の必要十分条件は，$\bar{x}$ に於いて一般化された Kuhn-Tucker 条件 (3.2) が成立することである．更に (3.1) は連結した最適解集合をもつ．

［証明］　略．　□

4．一般凸関数の間の関係

準凸関数 [10] は連続である必要もなく，一般化された凸関数として，かなり広いクラスに属している．関数 f が準凸であることと，任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ に対して $L_f(\alpha)$ が凸集合であることは同値である．[7] には連続な準凸関数の一般化として，弧状準凸関数等が定義されているが，それらの関数のレベル集合は常に連結であることは注目すべきである．一方，2節の例 1 に示した様に invex 関数のレベル集合は連結であるとは限らない．

定理 4.1.　f を局所リプシッツ連続かつ正則とする．この時 f が擬凸である為の必要十分条件は，f が準凸かつ invex であることである．

［略証］　準凸かつ invex であることの必要性は背理法等により簡単に示すことができるので省略し，十分性のみを示す．

$0\in\partial f(x_1)$ であれば (2.7) は定理 2.1(a) より明らか．よって $0\notin\partial f(x_1)$ とする．$f'(x_1;x_2-x_1)>0$ ならば，f の準凸性及びある $x'\in l_x:=\{x\mid x=(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,\ 0\leqq\lambda\leqq1\}$ に対して $f(x')>f(x_1)$ となることから，$f(x_2)\geqq f(x')>f(x_1)$ となり (2.7) は成立する．そこで $f'(x_1;x_2-x_1)=0$ の場合を考える．全空間は超平面

$$H:=\{x\mid\xi^T(x-x_1)=0\},$$
$$(0\neq)\xi\in\partial f(x_1),\quad \xi^T(x_2-x_1)=0,$$

によって，$H^+:=\{x\mid\xi^T(x-x_1)>0\}$ と $H^-:=\{x\mid\xi^T(x-x_1)<0\}$ に分離される．その時，$x\in H^+$ に対しては $f'(x_1;x-x_1)\geqq\xi^T(x-x_1)>0$ から $f(x)>f(x_1)$ となるので，H^+ と $L_f(f(x_1))$ は共通部分をもたない．x_2 が H 上にあることと f の連続性により，$f(x_2)\geqq f(x_1)$ となり，(2.7) が成立する．よって f は擬凸になる．　□

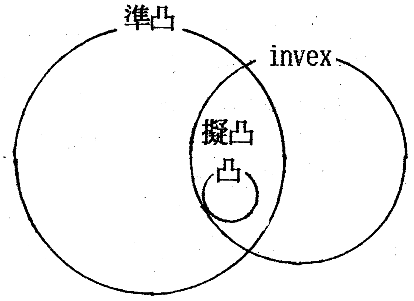

図1．　一般化された凸関数

凸関数の一般化には大別して２通りの方法がある．一つは準凸関数等にみられる様に関数のレベル集合の連結性（準凸関数では凸性）を保つやり方である．もう一つは invex 関数にみられる様に，関数値をレベル集合に写す点-集合写像のある種の下半連続性を保つやり方である．擬凸関数はその両方の一般化のタイプの共通部分として得られるもので，［11］に示される良い性質をもっている．

5．まとめと補足

本稿では，ある種の微分不可能な関数のクラス，特に Clarke [3] によって強調された局所リプシッツ連続かつ正則の条件の下で一般凸関数について論じた．他には [5] を参照されたい．本稿の結果については，R^n でない定義域を考えたり，正則の仮定を緩めることにより，もっと精密な理論の展開が可能と思われる．また一つの応用として，ファジイ集合の凸性がメンバーシップ関数の準凹性と同値であることに注目すると，3節の結果をファジイ計画に利用できるであろう．

一方， Lovász [9] は集合関数の劣モジュラ性と凸性の関係を調べているが，一般化された凸性が集合関数に対してはどう対応するかは興味深いところである．

謝辞．　　日頃御指導賜わる　茨木 俊秀　教授，　並びに本研究を通して有益な御助言を頂いた福島 雅夫　助教授に深く感謝致します．

参考文献

[1] M. Avriel, W.E. Diewert, S. Schaible and W.T. Ziemba, "Introduction to concave and generalized concave functions", in Generalized Concavity in Optimization and Economics, (S. Schaible and W.T. Ziemba, eds.), Academic Press, New York, 1981, pp. 21-50.

[2] A. Ben-Israel and B. Mond, "What is invexity?", J. Austral. Math. Soc. Ser. B **28** (1986), 1-9.

[3] F.H. Clarke, Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley-Interscience, New York, 1983.

[4] J.-P. Crouzeix, "A duality framework in quasiconvex programming", in Generalized

Concavity in Optimization and Economics, (S. Schaible and W.T. Ziemba, eds.), Academic Press, New York, 1981, pp. 207-225.

[5] W.E. Diewert, "Alternative characterization of six kinds of quasiconcavity in the nondifferentiable case with applications to nonsmooth", in Generalized Concavity in Optimization and Economics, (S. Schaible and W.T. Ziemba, eds.), Academic Press, New York, 1981, pp. 51-93.

[6] M.A. Hanson, "On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions", J. Math. Anal. Appl. **80** (1981), 545-550.

[7] H. Horst, "A note on functions whose local minima are global", J. Optim. Theory Appl. **36** (1982), 457-463.

[8] J. La Salle and S. Lefschetz, Stability by Lyapunov's Direct Method, Academic Press, New York, 1961.

[9] L. Lovász, "Submodular functions and convexity", in Mathematical Programming: The State of the Art, (A. Bachem et al., eds.), Springer, Berlin, 1983, pp. 235-257.

[10] O.L. Mangasarian, Nonlinear Programming, McGraw-Hill, New York, 1969.

[11] R. Mifflin, "Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization" SIAM J. Contr. Optim. **15** (1977), 959-972.

[12] Y. Tanaka, "A note on generalized convex functions" (1988), submitted for publication.

[13] Y. Tanaka, M. Fukushima and T. Ibaraki, "On generalized pseudoconvex functions", J. Math. Anal. Appl., to appear.

[14] I. Zang, E.V. Choo and M. Avriel, "On functions whose stationary points are global minima", J. Optim. Theory Appl. **22** (1977), 195-208.